ハミルトニアンの複雑性に対する推定時間限界のスケーリング (量子システム推定の数理)

久良, 尚任

数理解析研究所講究録
第2059巻 2017年 130-139

ハミルトニアンの複雑性に対する推定時間限界のスケーリング

久良 尚任
東京大学理学系研究科物理学専攻

1 はじめに

量子度量衡学においては、量子系を駆動させる未知の力学をいかに効率よく推定するかが重要な課題となる。この問題は実験系における測定、制御、較正を効率的に行う際に重要になるだけではなく、Shor のアルゴリズム [1] や Grover のアルゴリズム [2] といった量子計算アルゴリズムの機構とも深い関わりをもっている [3, 4, 5]。

量子度量衡の最も基本的な例が、位相シフト演算子 $U_\phi = |0\rangle\langle 0| + e^{i\phi}|1\rangle\langle 1|$ における位相 ϕ を推定する問題である。とくに、同じ力学 U_ϕ に従う量子系が r 個並列して存在する場合を考えると、ϕ の推定精度 $\delta\phi$ が r に従ってどのように向上するだろうか？この問題に対する答えは、r 個の量子系間の entanglement を許すかどうかによって、推定効率に 2 乗の差異が現れるということが知られている [6, 7]。量子系間に entanglement を許さない場合は、初期状態を

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \cdots \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{1}$$

とするのが最適であり、推定精度は標準量子限界 $\delta\phi \sim O(\delta^{-1/2})$ に従う。これは古典確率論における中心極限定理とも整合する結果である。一方、entanglement を許す場合は

$$\frac{|0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes \cdots \otimes |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{2}$$

という初期状態をとることができ、これは Heisenberg 限界 $\delta\phi \sim O(\delta^{-1})$ に従う。

このような推定の高速化は古典的なノイズに対して弱く [8]、したがって量子力学特有のものであると考えられている。Entanglement は量子度量衡において重要な役割を果たす一方で、異なる量子的メカニズムによる推定の高速化も知られている [9, 10]。

近年、推定の対象を 1 変数から多変数へと拡張した場合の量子度量衡理論が盛んに研究されている [11]。その 1 つの例が、d 次元系における $d-1$ 個の位相シフトを推定する問題

$$U_\phi = |0\rangle\langle 0| + e^{i\phi_1}|1\rangle\langle 1| + \cdots + e^{i\phi_{d-1}}|d-1\rangle\langle d-1| \tag{3}$$

である。別の例としては、d 次元系における任意のハミルトニアンを推定するような問題

$$U_\theta = \exp(\theta_1 X_1 + \cdots + \theta_{d^2-1} X_{d^2-1}) \tag{4}$$

も考えられる。いずれの場合に対しても、1 変数の場合と同様に Heisenberg 限界が得られることが確かめられている [12, 13]。すなわち、得られるパラメーターの推定精度 δ は、漸近的に r^{-1} に比例するようになる。

ここで、Heisenberg 限界 $\delta \sim r^{-1}$ の比例係数は一般に Hilbert 空間の次元や変数の数に依存している、という点も重要である。この比例係数は、量子アルゴリズムにおける計算複雑性の問題に対応している。推定すべき量子系が大きくなるにつれ、推定問題はどのくらい難しくなるだろうか？

本稿では、推定の対象を m 個の実変数に依存する $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^d$ 上のハミルトニアン $H_\theta \in \mathsf{su}(d)$ $(\theta \in \mathbf{R}^m)$ とし、推定のリソースを必要な時間 T で評価する。プランク定数を $\hbar = 1$ とすれば、ハミルトニアンと時間は互いに逆数の次元を持つので、推定効率はハミルトニアンの情報から自然に導かれることが期待される。

2 準備

未知の変数 θ に線形に依存するハミルトニアン

$$H_\theta = \sum_{j=1}^{m} \theta^j X_j, \qquad \theta = (\theta^1, \ldots, \theta^m) \tag{5}$$

を仮定する。H_θ の存在範囲 $\{H_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}^m\}$ は $\mathsf{su}(d)$ の m 次元部分空間であり、これを**ハミルトニアンモデル**とよぶことにする。モデルの基底 $\{X_1, \ldots, X_m\}$ は Hilbert-Schmidt 内積に対して正規直交であるとする : $\operatorname{tr} X_j X_k = \delta_{jk}$。このとき、変数に関する Euclid ノルムはハミルトニアンの Hilbert-Schmidt のノルムに対応する : $\|\theta' - \theta\|^2 = \operatorname{tr}(H_{\theta'} - H_\theta)^2$。逆に、ハミルトニアンのモデルとして $\mathsf{su}(d)$ の m 次元部分空間を指定すれば、その部分空間に対応する基底をとることができる。この基底のとり方は、直交変換 $X_j \mapsto \sum_k O_{jk} X_k$, $O \in \mathsf{O}(m)$ を除いて一意に定まる。

以上に加えて、ハミルトニアンモデルに対して次のような条件を課す :

$$X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_m^2 \propto I. \tag{6}$$

この条件は直交変換に対して不変であり、したがって基底のとり方には依存しない。

上記の条件をみたすハミルトニアンモデルの例には、$\mathsf{su}(d)$ 自身が挙げられる。これは $m = d^2 - 1$ 個の変数をもち、d 準位系の任意のハミルトニアンを推定することができるため、これを *full model* とよぶことにする。他方、Hilbert 空間の基底を適当に固定したとき、トレース 0 の実対角行列の全体も条件をみたすハミルトニアンモデルになる。このモデルの変数は $d-1$ 個あり、量子系の d 個の準位間に位相シフトを引き起こすハミルトニアンすべてを含む。

さて、Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^d$ 上のハミルトニアン $H = H_\theta$ が与えられたとき、この変数 θ をどのように推定すればよいだろうか。まず考えられるのは、初期状態 $|q\rangle \in \mathcal{H}_1$ を準備し、適当な時間 $T > 0$ を固定して時間発展させる方法である。この方法により θ に依存する量子状態

$$|q_\theta\rangle = e^{iTH_\theta}|q\rangle \tag{7}$$

が得られ、この状態を測定することにより未知変数 θ の情報を得る。ここで、初期状態の準備や量子測定に必要な時間は原理的に 0 にできる。一方で、初期状態を時間発展させて量子状態を作るためには必ず長さ T の時間が必要である。これは、情報源となるハミルトニアン H_θ をもつ量子系が 1 つしかないことに由来する。

しかし、実際に推定者が行える操作はより広範である。ここでは、これを下記のような Shrödinger 方程式により書き表す：

$$\begin{aligned} |q_\theta\rangle = |q_\theta(T)\rangle, \qquad |q_\theta(0)\rangle = |q\rangle, \\ \frac{d}{dt}|q_\theta(t)\rangle = i\big(H_\theta + V(t)\big)|q_\theta(t)\rangle \end{aligned} \tag{8}$$

推定者が十分に強力であれば、制御ハミルトニアン $V(t)$ を任意に選ぶことができるだけでなく、任意の大きさの補助系 $\mathcal{H}_2$ を付加することができる。補助系は、光学系など無限自由度をもつ系でもよい。推定すべきハミルトニアンで駆動される量子系を $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^d$ とすると、量子状態 $|q_\theta(t)\rangle$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ に存在する。制御ハミルトニアン $V(\theta)$ もまた、$\mathcal{H}$ 上の作用素である。

上記の枠組みは非常に一般的である。実際、任意の CPTP 写像はより大きな量子系の上でのユニタリー発展と部分系への射影に分解することが可能であるから [14]、量子系の部分測定やフィードバックを含めた量子力学的な操作はすべて式 (8) の形に還元できる。また、H_θ に従って時間発展するような量子系が r 個与えられた場合、r 個の量子系上の時間 τ にわたる操作は 1 つの量子系における時間 $T = r\tau$ にわたる操作に還元することができる。

さて、以上のようにして作られた量子状態 $|q_\theta\rangle$ を測定して、変数の推定値 θ^* を得たとしよう。変数 θ 自体は連続的であるから、ほとんどの場合 $\theta^* = \theta$ となることはない。そこで、推定において許容される誤差 δ と確率 p を導入し、以下の式を満たすような推定値 θ^* を求めることを合目標とする：

$$\mathbb{P}\big[\|\theta^* - \theta\| > \delta\big] \leq p. \tag{9}$$

ただし、任意の $\theta \in \mathbb{R}^m$ に対して上の条件を達成することは不可能であるため、変数 θ の大きさはある範囲 Θ 以内に収まっていることを仮定する。すなわち、

$$\text{推定値 } \theta^* \text{ が良い} \overset{\text{def}}{\iff} \|\theta\| \leq \Theta \text{ なる任意の } \theta \in \mathbb{R}^m \text{ で (9) が成立} \tag{10}$$

と定義する。本稿で解析する主要な問題は、良い推定値を生成するプロトコルに要する時間 T が変数 m, d, δ, p, Θ にどのように依存するかである。

なお、m, d, p が無次元量なのに対して、δ および E はエネルギーの次元を持つ。これは、式 (5) において正規直交性から X_j が無次元になり、θ とハミルトニアンが同じ次元をもつことに由来する。また、確率 p に対する時間 T の依存性は高々対数的（$\sim \log(1/p)$）にでき [15]、また変数の存在範囲 Θ に対する依存性も高々対数的になることも示すことができるため、所要時間 T は m, d, δ の関数で表される。

3　推定時間の下界：量子 Fisher 情報量を用いた解析

まず、ハミルトニアンの推定に必要な時間の下界を量子 Fisher 情報量（QFI）を用いて導出する。量子状態 $|q_\theta\rangle$ が与えられたとき、QFI は各 θ における正定値行列として

$$[J(\theta)]_{jk} = 4 \cdot \left\langle \tfrac{\partial q_\theta}{\partial \theta_j} \middle| \left[1 - |q_\theta\rangle\langle q_\theta|\right] \middle| \tfrac{\partial q_\theta}{\partial \theta_j} \right\rangle. \tag{11}$$

と定まる。量子状態 $|q_\theta\rangle$ を m 次元多様体とみなしたとき、$J(\theta)$ は Riemann 計量に相当する。この量子状態を N 個測定して得られた推定値を $\theta^* \in \mathbb{R}^m$ としよう。この推定値は θ で条件づけられた確率分布 $p(\theta^*|\theta)$ に従い、推定誤差の大きさは共分散行列

$$[V(\theta)]_{jk} = \mathbb{E}[\delta\theta_j \delta\theta_k], \qquad (\delta\theta = \theta^* - \theta) \tag{12}$$

で見積もることができる。推定誤差 $\delta\theta$ の期待値が θ によらず 0 になること（不偏性）を仮定すると、共分散行列に対して次に示す Cramér-Rao の不等式 [16, 17] が成立する：

$$V(\theta) \geq N^{-1} J^{-1}(\theta). \tag{13}$$

ここで $J^{-1}(\theta)$ は $J(\theta)$ の逆行列であり、幾何学における Riemann 計量の双対に対応する。したがって、推定誤差の大きさ $V(\theta)$ は QFI によって制限され、際限なく小さくすることは不可能である。これを Cramér-Rao 限界（CRB）という。推定誤差の Euclid ノルム $\|\theta^* - \theta\|^2 = \|\delta\theta^*\|^2$ の期待値は共分散行列のトレースで表せることに注意すると、許容誤差 δ はおおよそ

$$\delta^2 \sim \mathrm{tr}[V(\theta)] \geq N^{-1}\,\mathrm{tr}[J^{-1}(\theta)] \geq \frac{m^2}{N}\left(\mathrm{tr}\left[J(\theta)\right]\right)^{-1} \tag{14}$$

と評価されるため、良い推定値を生成するためには $\mathrm{tr}[J(\theta)]$ を大きくとらなければならないことが導かれる（式 (14) における 2 番目の不等号は Schwartz の不等式から従う）。

定数倍が付加することを許すと、ここでの議論を精密化し、さらに不偏性の仮定も取り除くことできる。例えば、次の事実を証明できる：

Proposition 1　$\delta \leq \dfrac{\Theta}{8}, p \leq \dfrac{1}{17}$ とすると、(10) で定める良い推定値 θ^* に対して

$$\delta^2 \gtrsim \frac{m^2}{64N} \cdot \inf_{\|\theta\| \leq \Theta} \left(\mathrm{tr}\left[J(\theta)\right]\right)^{-1} \tag{15}$$

が成立する。なお、推定値 θ^* は不偏でなくともよい。

さて、以上の事実を踏まえて、ハミルトニアン推定に必要な時間を見積もる。量子状態 $|q_\theta(t)\rangle$ に対応する QFI を $J(\theta, t)$ で表すことにすると、その時間に対する変化 $\frac{\partial}{\partial t}J(\theta, t)$ を Schrödinger 方程式を用いて計算することができる。その結果、時刻 t における QFI の増加量は現在の量子状態 $|q_\theta(t)\rangle$ によってのみ決定され、その時刻における制御ハミルトニアン $V(t)$ には依存しないことが分かる。この事実は、制御ハミルトニアンが未知変数 θ の情報を伝搬しないことに由来する。そ

のかわり、制御ハミルトニアンは $|q_\theta(t)\rangle$ を最適な状態に制御することで、間接的に QFI の増加速度に貢献することができる。

上記に加えてさらに Schwartz の不等式を用いることで、現在の量子状態 $|q_\theta(t)\rangle$ にも依存しない QFI の増加速度の上限を求めることが出来る：

Theorem 2 条件 (6) を満足するようなハミルトニアンモデルに対して、常に

$$\frac{\partial}{\partial t}\big(\mathrm{tr}\, J(\theta,t)\big) \leq \sqrt{\frac{16m}{d}\,\mathrm{tr}\, J(\theta,t)} \tag{16}$$

が成立する。とくに $J(\theta,t{=}0)$ が 0 であることに注意すると、式 (16) を微分方程式として解いて。$trJ(\theta,t)$ に対する上限を得る：

$$\mathrm{tr}\, J(\theta,t) \leq \frac{4m}{d}t^2.$$

を得る。

すなわち、時刻 $t=T$ までの時間発展で量子状態 $|q_\theta\rangle$ を準備し、それを N 個用意して測定した場合の CRB は

$$\delta^2 \gtrsim md/4NT^2 = O(md/NT^2) \implies NT^2 \geq O(md/\delta^2) \tag{17}$$

となる。T は量子力学的な時間発展、N は古典統計に基づいた反復操作であることから、T および N のそれぞれを量子的コストおよび古典的コストとみなすことができる。すなわち、式 (17) は量子的コストと古典的コストのトレードオフ関係を表している。ここで、推定にかかる時間は全体で $T_{\mathrm{tot}} = NT$ であることに注意すると、

$$T_{\mathrm{tot}} \geq O(md/\delta^2 T) = O(\sqrt{mdN}/\delta) \tag{18}$$

となる。すなわち、CRB から導かれる所要時間の下界は、量子的コスト T が大きいほど、また古典的コスト N が小さいほど低下することが分かる。ただし、少なくとも $N \geq 1$ が成立することから、T_{tot} の絶対的な時間下界

$$T_{\mathrm{tot}} \geq O(\sqrt{md}/\delta) \tag{19}$$

が導かれる。これは推定のプロトコルによらず、ハミルトニアン推定において必ず満たされていなければならない限界である。

式 (18) から、量子度量衡における標準量子限界と Heisenberg 限界を議論することもできる。ハミルトニアン H_θ に駆動される量子系が r 個存在するとしよう。各量子系における時間発展の長さと、最終的な状態を測定する回数は $O(1)$ であるとする。このとき、

- 初期状態のエンタングルメントを認めない場合、それぞれの量子系において個別に量子状態を準備したとみなすことが出来る。したがって $T=\tau=O(1)$, $N=O(r)$ とすることが出来るため、$T_{\mathrm{tot}} = O(md/\tau\delta^2) \sim \delta^{-2}$ となり、標準量子限界が導かれる。

- 初期状態のエンタングルメントを許す場合、r 個の量子系における長さ $O(1)$ の時間発展は 1 つの量子系における長さ $O(r)$ の時間発展に帰着させることができる。したがって $T = r\tau = O(r)$; $N = O(1)$ となるため、$T_{\mathrm{tot}} = O(\sqrt{mdN}/\delta) \sim \delta^{-1}$ となり、Heisenberg 限界が導かれる。

4 所要時間の上界：具体的なプロトコルの構成

さて、前節で推定の所要時間 T_{tot} に対する下界 (19) を量子 Fisher 情報量の計算により導いた。本節では、必要な時間 T_{tot} に対する上界を導出する。ある数 T_0 に対して $T_{\mathrm{tot}} \leq T_0$ となることを示すには、実際に所要時間が T_0 以下であるような推定プロトコルを構成してやればよい。しかし、実際に $T_0 = O(\sqrt{md}/\delta)$ を満たすような推定プロトコルは知られていない。

本稿では $T_{\mathrm{tot}} \leq O(md/\delta)$ なる上界を導き出す。そのために、まず標準量子限界 $O(mdE/\delta^2)$ に従うような基本プロトコルを構成し、そのプロトコルを改良することで Heisenberg 限界 $O(md/\delta)$ に従うプロトコルを得る。基本プロトコルを改良する方法としては、エンタングルメントを用いる方針と、フィードバックを用いる方針の 2 通りがある。

4.1 基本プロトコルの構成

まず、Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^d$ に対して最大エンタングルメント状態 (MES) を定義する。$\mathcal{H}_1$ の正規直交基底を $\left\{|e_i\rangle\right\}_{1\leq i\leq d}$ とし、双対空間 $\mathcal{H}_1^*$ における基底を $\left\{|e_i^*\rangle_{1\leq i\leq d}\right\}$ とすると、最大エンタングルメント状態は

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=1}^{d}|e_i\rangle \otimes |e_i^*\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^* \tag{20}$$

として定まる。

基本プロトコルにおいては、MES をハミルトニアン θ で時間 T だけ発展させて量子状態 $|q_\theta\rangle = (e^{-iTH_\theta} \otimes I)|\Phi\rangle$ を得る。この量子状態 $|q_\theta\rangle$ を十分な数 N だけ用意して測定することで推定値 θ^* を求める。

では、条件 (10) を満たす推定値 θ^* を得るには N をどの程度大きくすればよいだろうか。式 (14) に示すような CRB を用いれば、$|q_\theta\rangle$ の QFI から最低限必要な N を求めることができる。しかし、CRB は不等式の形で与えられており、等号は一般に成立しない。

とくに、QFI からは量子状態の重複の情報を読み取ることができない。例えば、推定すべき変数 $\theta = \theta_1$ に対して、$|q_{\theta_1}\rangle = |q_{\theta_2}\rangle$ を満たす θ_1, θ_2 がとれたとする。このとき、量子状態から θ_1 と θ_2 を識別する方法は存在しない。とくに $\|\theta_1 - \theta_2\| > 2\delta$ であれば、この場合に良い推定値を計算することは不可能となる。

QFI は Riemann 計量に相当し、量子状態の無限小近傍の情報しか提供しない。つまり、2δ という有限の距離をもつ変数に対する制約は QFI から得られない。さらに、このような状況は、$T \gg 1/\Theta$ を満たすような長い時間発展の場合は一般に起こり得る。したがって、推定を正しく行

うことができるためには、量子状態を準備する時間 T は少なくとも $O(1/\Theta)$ 程度に短くなければならない。

推定に必要な量子状態の数 N を求めるために、次のような量 R_δ を導入する：

$$R_\delta = \inf\{d_{\mathrm{FS}}(q_{\theta'}, q_\theta) \mid \|\theta\| \le \Theta, \|\theta'\| \le \Theta, \|\theta' - \theta\| \ge 2\delta\}. \tag{21}$$

ただし、$d_{\mathrm{FS}}(q', q) = \cos^{-1}\left|\langle q'|q\rangle\right|$ は二つの量子状態間の距離を定める Fubini-Study 距離とよばれるものであり、QFI を測地線に沿って積分したものに相当する。このとき、必要な量子状態の数 N は $N = O(m/R_\delta^2)$ となる [18]。

さて、基本プロトコルにおける量子状態 $|q_\theta\rangle$ は、MES を長さ T だけ時間発展させたものであった。この量子状態に対して R_δ を評価するには、二つの量子状態 $|q_\theta\rangle, |q_{\theta'}\rangle$ の内積を Dyson 展開を用いて直接計算すればよい。その結果、T が $1/\Theta$ に比べて十分に小さいときは $R_\delta = O(T\delta/\sqrt{d})$ となることが求められる。以上より必要な量子状態の個数は $N = O(md\Theta^2/\delta^2)$、所要時間は $T_{\mathrm{tot}} = O(md\Theta/\delta^2)$ となる。同時に、量子的コスト T が $T \le O(1/\Theta)$ を満たさなければならないという制約の下で、基本プロトコルが式 (18) にあるような CRB の等号条件を満たしていることが分かる。

4.2 エンタングルメントによるプロトコルの改良

さて、基本プロトコルを $T_{\mathrm{tot}} = O(md/\delta)$ まで改良する。1 つめの方法は、ハミルトニアン H_θ で駆動される量子系を r 個用意して、それぞれにおいて長さ $\tau = O(1/\Theta)$ 程度の時間発展を行う方法である。その際、r 個の量子系間のエンタングルメントを最大限に活用する方法は、、全ヒルベルト空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{all}} = \otimes^r \mathcal{H}_1$ の完全対称な部分空間 $\mathcal{H}_{\mathrm{sym}} = \otimes^r_{\mathrm{sym}} \mathcal{H}_1$ において MES を用意することである [13]。このときに得られる量子状態を $|q_r(\theta)\rangle$ としよう。量子状態 $|q_r(\theta)\rangle$ のなす Riemann 多様体は、単一チャネルの場合（$r = 1$）と比べて相似形になっており、その相似比は

$$g_r = \sqrt{\frac{r(d+r)}{d+1}} \tag{22}$$

で与えられる。r が増大するにつれ R_δ も増大するが、最大でも $R_\delta \le \frac{\pi}{2}$ であることに注意すると、$R_\delta = O(1)$ 程度になるまで量子系を並列させればよいことが分かる。そのためには $\frac{T\delta}{\sqrt{d}} \cdot g_r = O(1)$ すなわち $r = O(\Theta d/\delta)$ 個程度の量子系を要する。このとき $N = O(m)$ であり、このプロトコルの所要時間は

$$T_{\mathrm{tot}} = O(NrT) = O\left(m \cdot \frac{\Theta d}{\delta} \cdot \frac{1}{\Theta}\right) = O(md/\delta) \tag{23}$$

となる。

4.3 フィードバックによるプロトコルの改良

基本プロトコルに対するもう1つの改良法は、適応的なフィードバックをかけることである。推定者の目的は、θ が存在するである球の半径を

$$\|\theta\| \leq \Theta \rightsquigarrow \|\theta - \theta^*\| \leq \delta \tag{24}$$

というように小さくすることである。しかし、基本プロトコルは標準量子限界に従うため、$\delta \ll \Theta$ の場合にはあまり効率的ではないフィードバックを用いる方法では、変数の実効的な探索半径 Θ から δ まで徐々に小さくしていくことで Heisenberg 限界を達成する。

実数 $\alpha > 1$ を適当にとる。適応的なフィードバックを用いた推定は、$n = \lfloor \log_\alpha(\Theta/\delta) \rfloor$ 段階に分けて行う。第1段階では、

$$\|\theta\| \leq \Theta \rightsquigarrow \|\theta - \theta_1^*\| \leq \Theta/\alpha \tag{25}$$

をみたす推定値 θ_1^* を求めることを目標にする。これは基本プロトコルにおいて $\delta = \Theta/\alpha$ とした場合に相当するから、推定に必要な時間は $T_1 = O(md\alpha^2/\Theta)$ となる。次に、第2段階においては

$$\|\theta - \theta_1^*\| \leq \Theta/\alpha \rightsquigarrow \|\theta - \theta_1^*\| \leq \Theta/\alpha^2 \tag{26}$$

をみたす推定値 θ_2^* を求める。その際、推定すべきハミルトニアン H_θ だけでなく制御ハミルトニアン $V = -H_{\theta_1^*}$ を印加する。これにより全ハミルトニアンは $H = H_\theta + V = H_{\theta-\theta_1^*}$ となり、変数の実質的な存在範囲を Θ/α に縮めることができる。この場合、基本プロトコルの Θ, δ を $\Theta/\alpha, \Theta/\alpha^2$ で置き換えて、、$T_2 = O(md\alpha^3/\Theta)$ 程度の時間が必要になることがわかる。以降同様にして、推定の k 段階目では、

$$\|\theta - \theta_{k-1}^*\| \leq \Theta/\alpha^{k-1} \rightsquigarrow \|\theta - \theta_k^*\| \leq \Theta/\alpha^k \tag{27}$$

となるような推定値 θ_k^* を求める。その際、$V = -H_{\theta_{n-1}^*}$ なる制御ハミルトニアンを印加し、$T_k = O(md\alpha^{k+1}/\Theta)$ 程度の時間を要する。これを $k = 1, \ldots, n$ に対して行えば、最後の推定値 θ_n が条件をみたす推定値となる。ここで所要時間の合計は

$$T_{\text{tot}} = T_1 + \cdots + T_n = O\left(\frac{md(\alpha^{n+1} - 1)}{\Theta(\alpha - 1)}\right) \leq O\left(\frac{md}{(\alpha - 1)\delta}\right) \tag{28}$$

となり（δ は Θ/α^n 程度であることに注意）、例えば $\alpha = 2$ とすることによって所要時間を $T_{\text{tot}} = O(md/\delta)$ にできる。

5 課題

本稿において、条件 (6) をみたすようなハミルトニアンを推定するのに必要な時間 T_{tot} を解析した。Hilbert 空間を d 次元都市、変数の数を m とすると、

$$O\big((md)^{1/2}/\delta\big) \leq T_{\text{tot}} \leq O(md/\delta) \tag{29}$$

であることを導出した。所要時間の下界は、量子 Fisher 情報量を用いた Cramér-Rao 限界から導出された。多変数ハミルトニアンの Heisenberg 限界はエンタングルメントおよびフィードバックのいずれからも得ることができたが、どちらも同じ上界 $O(md/\delta)$ を与えた。

上界と下界の間には $O(\sqrt{md})$ 倍のギャップが存在する。$T_{\mathrm{tot}} = O\big((md)^{1/2}/\delta\big)$ となるようなプロトコルは、$d = O(1)$ となるような場合を除き見つかっていない。一般のハミルトニアンモデルの推定には、より強い下界が存在することが予想される。とくに QFI は量子状態のなす幾何構造の 1 次近似の情報しか与えないため、曲率などより高次の幾何学的構造に対する制約がある可能性を検討している。

参考文献

[1] Peter W. Shor. “Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring.” In *Proc. 35th Ann. Symp. on Fundamentals of Computer Science*. IEEE, 124–134 (1994).

[2] Lov K. Grover. “A fast quantum mechanical algorithm for database search.” In *Proc. 28th Ann. ACM Symp. on Theory of computing*. ACM, 212–219 (1996).

[3] Edward Farhi and Sam Gutmann. “Analog analogue of a digital quantum computation.” *Phys. Rev. A* **57**, 2403–2406 (1998).

[4] Rafał Demkowicz-Dobrzański and Marcin Markiewicz. “Quantum computation speedup limits from quantum metrological precision bounds.” *Phys. Rev. A* **91**, 1–5 (2015).

[5] Nana Liu *et al.* “Power of one qumode for quantum computation.” *Phys. Rev. A* **93**, 052304 (2016).

[6] M. J. Holland and K. Burnett. “Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit.” *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1355–1358 (1993).

[7] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. “Quantum-Enhanced Measurements: Beating the Standard Quantum Limit.” *Sci.* **306**, 1330–1336 (2004).

[8] Rafał Demkowicz-Dobrzański, Jan Kołodyński, and Mădălin Guţă. “The elusive Heisenberg limit in quantum-enhanced metrology.” *Nat. Commun.* **3**, 1063 (2012).

[9] B. L. Higgins *et al.* “Entanglement-free Heisenberg-limited phase estimation.” *Nature* **450**, 393–396 (2007).

[10] Animesh Datta and Anil Shaji. “Quantum Metrology without Quantum Entanglement.” *Mod. Phys. Lett. B* **26**, 1230010 (2012).

[11] Magdalena Szczykulska, Tillmann Baumgratz, and Animesh Datta. “Multi-parameter quantum metrology.” *Adv. Phys. X* **1**, 1–19 (2016).

[12] Manuel A. Ballester. “Entanglement is not very useful for estimating multiple phases.” *Phys. Rev. A* **70**, 1–6 (2004).

[13] Hiroshi Imai and Akio Fujiwara. "Geometry of optimal estimation scheme for $SU(D)$ channels." *J. Phys. A* **40**, 4391–4400 (2007).

[14] W. F. Stinespring. "Positive functions on C*-algebras." *Proc. Am. Math. Soc.* (1955).

[15] Herman Chernoff. "A Measure of Asymptotic Efficiency for Tests of a Hypothesis Based on the sum of Observations." *Ann. Math. Stat.* **23**, 493–507 (1952).

[16] C. Radhakrishna Rao. "Information and the accuracy attainable in the estimation of statistical parameters." *Bull. Calcutta Math. Soc.* **37**, 81–91 (1945).

[17] M. Cramer and J. Eisert. "A quantum central limit theorem for non-equilibrium systems: exact local relaxation of correlated states." *New J. Phys.* **12**, 055020 (2010).

[18] A. Hayashi, T. Hashimoto, and M. Horibe. "Reexamination of optimal quantum state estimation of pure states." *Phys. Rev. A* **72**, 032325 (2005).